武侠和数学

陆志勤　罗莱莉

武侠小说里有“听风辨器”一说，讲的是武林高手在战斗中，闭上眼睛，气沉丹田，就可以听出对手武器的种类、来袭的方向等等。比如《天龙八部》里漂亮的王语嫣，不仅能听出对手使用的暗器的形状，还可以听出他的门派、练武的层次、有没有走火入魔等等细节……当然这只是小说，现实生活中不可能有这样的人。但是另一方面，一个普通人可以毫不费力地听出不同乐器发出的声音，比如大提琴和小提琴发出的声音就是不一样的。大提琴声音低沉，小提琴声音比较清亮。一个受过训练的音乐工作者肯定可以分辨出更多的细节。这里就产生一个数学问题：如果有一双完美的耳朵，并且受过足够的训练，那么一个人通过听觉最多能够听出一种乐器的多少细节？

1966 年，马克 • 卡兹（Mark Kac, 1914-1984）在《美国数学月刊》（*American Mathematical Monthly*）上发表了一篇文章，阐述了这个数学问题。其实对于管弦乐器来说，“听音辨器”这个问题比较简单，甚至不需要用到多少数学。我们知道，一种管弦乐器，比如提琴，它的每一根弦发出的声音的主要部分被称为基音，而基音的频率被称为基础频率。除了基音以外，琴声中还包含泛音。泛音的频率是基音的整数倍，它能够和基音一起组成和谐的共振之音。对于一双灵敏的耳朵，听出基音的频率是不成问题的。如果基音低沉，那说明提琴的弦比较长，那就是大提琴，如果基音比较高亢，那就是小提琴。

小提琴的弦本质上是一维的。一维的问题容易解决，对于二维的物体，同样的问题就困难得多。在卡兹的文章中，他用鼓来作为两维乐器的代表。真实的鼓当然大多数都是圆形的。不过为了能够讨论这里的数学问题，我们做一些假设：首先我们假定鼓发出的声音只和鼓面的形状有关，而与整个（三维的）鼓以及生产鼓的材料无关;其次我们假定鼓面的形状不仅可以是圆形的，也可以是椭圆形的，三角形的，甚至可以是多边形的。也就是说，我们假定鼓面是平面上的一个有界区域。和小提琴的情况相同的是，擂鼓发出声音的主要部分被称为基音，而基音的频率被称为基础频率；除了基音以外，鼓声中也包含泛音。和小提琴的情形不同的是，在二维的情形下，泛音一般不是基音的整数倍了，它们之间也没有明显的联系。根据数学上的傅立叶级数理论，鼓声其实是许多不同频率的声音（基音和泛音）组合而成的。我们假定一双完美的耳朵可以从鼓声中分离出所有不同频率的声音，而每一种频率可以用一个正实数来表示，在这种假设下，我们可以问这样的一个数学问题：是否所有的这些实数的集合能完全决定那一面被听的鼓的形状呢？这个就是 1966 年卡兹提出的著名的问题。

奇妙的是，研究鼓声，或者鼓的振动，和我们日常生活中的另一个常见的现象：热传导，有着相同的数学基础。在数学上，这些现象都能够被归结为下列特征值方程（和一些边界条件，这里我们不详细论述了）

$$\Delta f + \lambda f = 0.$$

在上面的方程中，Δ 被称为拉普拉斯算子，这个称号是用来纪念法国数学家拉普拉斯（1749-1827），它是微分方程里最重要的算子之一。希腊字母 λ 是一个正实数，用来表示鼓能发出的某一种频率的平方，也即基音或某一种泛音的平方。在数学上，我们称 λ 为“特征值”。f 被称为“特征函数”，它也有一定的物理意义，不过这里我们就不详细解释了。

在一维情形（弦振动），上面的方程可以被简化为

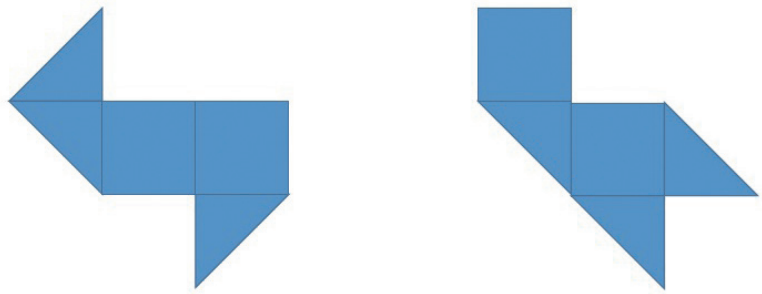
$$f'' + \lambda f = 0,$$

其中 f'' 表示 f 的二阶导数。这个方程在工程上被称为简谐振动方程，它的解是正弦和余弦函数的组合。通过研究这个方程，我们可以从数学上严格证明音乐家们早就知道的事实：所有的特征值都是最小的那个特征值的整数平方倍。

二维的（鼓振动）问题就困难的多，首先特征值方程会变得看上去有点吓人

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \lambda f = 0.$$

这是一个二阶偏微分方程。和一维情形不一样的是，对于一般的平面区域，



上述方程的精确解是找不到的。所以卡兹问题变成：如果有两面鼓，它们发出的所有的基音和泛音都一样，也就是说这两面鼓有着相同的特征值，那么它们的形状是不是完全一样呢？

对于这个问题，数学家们努力了几十年，直到 1992 年才有了突破。三位数学家 Carolyn Gordon, David L. Webb 和 Scott Wolpert 在《美国数学会公报》（*Bulletin of American Mathematical Society*）上发表了一篇文章，解决了这个问题。

我们知道，在数学上，如果要证明某个论断成立，那就要证明该论断下包含的所有情形都成立。比如说勾股定理，我们不但要证明勾三股四弦五，还要证明对于所有的直角三角形，其斜边的平方等于两直角边的平方和。但是反过来，如果要说明一个论断不成立，只要找出一个例子就行了。这样的例子被称为反例。虽然只是一个例子，有时它的难度不见得比证明一个论断更容易。

卡兹的问题在 1992 年以一种令人惊奇的方式被给出了否定的解答。他们的工作被许多数学家简化以后，我们才知道，上面两个稀奇古怪的鼓面（相信这种形状的鼓不会出现在任何现实生活中）它们发出的声音的频率是一样的。也就是说，如果光听声音，那么就算是一双完美的耳朵，也不能区分这两面鼓。用数学的语言来讲，这两个平面区域有着相同的特征值（集合）。

虽然卡兹问题的答案是否定的，但是这不代表我们不能得到一些信息。比如上面的两个平面区域尽管是不一样的，但是很容易验证，它们有着相同的面积和周长。除此之外，它们还有其他的一些相同的量。对于许多实际问题来说，这些量可能更重要。比如在石油勘探中，我们可以用人造地震来测量出地下油田发出的频率，虽然一般我们无法知道地下油田的形状，但是我们可以用特征值的信息来估算出地下油田的体积，也就是石油的储量，这才是更重要的。相同的数学原理现在也被广泛地使用在医疗、天文、模式识别、人工智能等等许多领域。

卡兹问题的研究也催生出纯数学上一个叫做谱几何的分支。它使用到数学中最前沿的微分几何与微分方程的结果，是一个正在蓬勃发展的领域。

那么在《天龙八部》里，如果王语嫣姑娘足够聪明，理论上她能不能仅仅通过听风辨器来说出暗器的形状？如果用上图的形状作出两种暗器，并且仅仅

提供给王姑娘这两种暗器本身振动所发出的声音，那么她就不可能区分它们。当然，这两种暗器破空来袭的时候和空气摩擦发出的声音可能是不一样的，聪明的王姑娘还是有可能辨别其中的不同，不过这是另一个（很大的）数学问题了。武侠世界里像王语嫣这样聪明的美女到处都是，这有点令人郁闷。

本文是发表在牛津大学出版社部落格文章的改写版，陆志勤和罗茱莉合作发表了一系列关于拉普拉斯算子谱的文章，包括他们在《美国数学月刊》上发表的文章《对称之声》。这篇文章获得美国数学协会 2016 年度的哈尔莫斯 - 福特奖。原文网址在 https://blog.oup.com/2015/12/drum-shape-mathematics/

感谢王作勤和雷洁的指正，更近一步的介绍可以看陈化的文章：《你能听出一面鼓的几何形状吗——谈谈等谱问题》，数学通报，2014 年，第 53 卷，第 5 期。

陆志勤，加州大学尔湾分校数学系的教授，是微分几何与几何分析方面的专家。他获得 2003 年斯隆奖，2004 年美国国家自然科学基金的 Career Award，以及 2013 年美国数学会会士称号。

罗茱莉 (Julie M. Rowlett)，瑞典查尔莫斯工学院的高级讲师，是几何分析、整体分析及其相关领域的专家，并涉足数学教育领域。她的书 *Blast into Math!* 给了纯数学一个严格且有趣的介绍。